

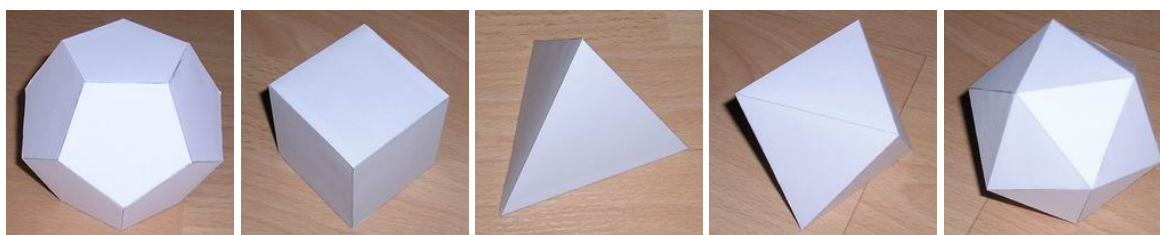
## BEŽNÉ A ŠPECIÁLNE HRACIE KOCKY

Téma je zameraná na výpočet pravdepodobnosti v situácii, keď jednotlivé udalosti nie sú rovnako pravdepodobné. Túto situáciu predstavuje hracia kocka, na ktorej jednotlivé steny nepadajú rovnako často. Aby bolo možné výpočty previesť na výpočet podielu všetkých priaznivých a všetkých možných udalostí, nahradzame špeciálnu hraciu kocku pravidelným osemstenom. Osemsten ako model špeciálnej hracej kocky by mal žiakom uľahčiť riešenie úloh 6 až 8.

Úlohy 2 a 3, ktoré uvádzame ešte pred zavedením osemstenu ako pomôcky pre ďalšie výpočty, sú preto pomerne náročné. Odporúčame zadať ich len lepším žiakom. K týmto úlohám sa s ostatnými žiakmi možno vrátiť po vyriešení úlohy 6 (úloha 3 je totožná s výpočtom pravdepodobnosti pre Beátu v úlohe 7).

Úlohu 4 odporúčame robiť v skupinách.

Úlohu 5 odporúčame riešiť až po diskusii o riešení úlohy 4. Ak sa žiaci ešte nestretli s pravidelnými mnohostenmi, môžeme im pomôcť obrázkami týchto mnohostenov:



Tiež je vhodné po vyriešení úlohy 5 zadať žiakom ako úlohu zhotovenie modelu pravidelného mnohostena.

1. Stena so 4 bodkami padne s pravdepodobnosťou **0,125**.  
Stena so 6 bodkami padne s pravdepodobnosťou **0,375**.

Pravdepodobnosti, že padnú steny s 1, 2, 3, 4 alebo 5 bodkami, sú rovnaké, označme ich  $p$ . Pravdepodobnosť, že padne stena so 6 bodkami, je 3-krát väčšia, teda  $3p$ . Súčet všetkých týchto pravdepodobností musí byť 1:

$$p + p + p + p + p + 3p = 1, \quad \text{t.j.} \quad 8p = 1,$$

odtiaľ 
$$p = \frac{1}{8} = 0,125, \quad 3p = 0,375.$$

2. **14,0625 %**

Súčet 12 môže padnúť len jedným spôsobom: na oboch kockách padne stena so 6 bodkami. Tá padne s pravdepodobnosťou 0,375. Preto hľadaná pravdepodobnosť je

$$0,375 \cdot 0,375 = 0,140625 = 14,0625 \%$$

3. **9,375 %**.

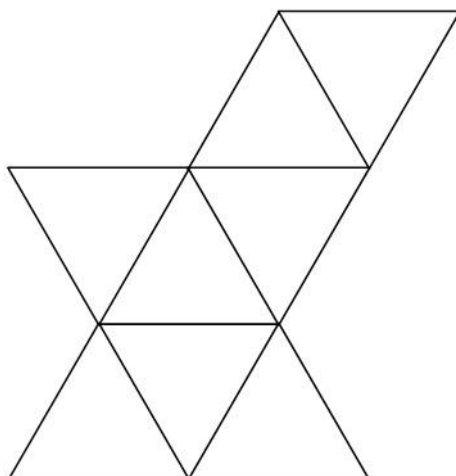
Súčet 11 môže padnúť dvoma spôsobmi: na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej stena so 6 bodkami, alebo naopak. Stena s 5 bodkami padne s pravdepodobnosťou 0,125 a stena so 6 bodkami padne s pravdepodobnosťou 0,375. Preto hľadaná pravdepodobnosť je

$$0,125 \cdot 0,375 + 0,375 \cdot 0,125 = 0,09375 = 9,375 \%$$

4. Mnohosten má **8 stien**.

Hľadaným mnohostenom je pravidelný 8-sten (dve štvorboké pyramídy zlepené základňami), jeho stenami sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Tri steny obodkujeme 6 bodkami a na zvyšných päť stien dáme 1, 2, 3, 4 a 5 bodiek.

5. Rôznych sietí pravidelného osemstena je viac, uvádzame jednu z možností.



6. Najväčšiu šancu na výhru má **Adam Poctivý**.

Uvedieme dve riešenia:

1. Na oboch kockách musí padnúť stena s 1 bodkou. Tá padá na bežnej kocke častejšie ako na špeciálnej, preto najväčšiu šancu na výhru má Adam.
2. Vypočítame pravdepodobnosť, s akou pri jednom hode padne súčet 2. Čím väčšia je táto pravdepodobnosť, tým väčšia je aj šanca na výhru.

*Adam Poctivý:* Celkom je 36 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky (6 pre každú kocku,  $6 \cdot 6 = 36$ ). Priaznivá je len jedna: na oboch kockách padne stena s 1 bodkou. Hľadaná pravdepodobnosť je

$$\frac{1}{36} = 0,027\ 77\dots$$

*Beáta Nečestná:* Celkom je 64 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve špeciálne kocky (8 pre každú z nich, presnejšie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, to je pre dve kocky  $8 \cdot 8 = 64$  možností). Priaznivá je len jedna: na oboch padne stena s 1 bodkou. Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{1}{64} = 0,015\ 625.$$

*Viera Polovičná:* Celkove je 48 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky (6 pre bežnú hraciu kocku a 8 pre špeciálnu hraciu kocku,  $6 \cdot 8 = 48$ ). Priaznivá je len jedna, keď na oboch padne stena s 1 bodkou. Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{1}{48} = 0,020\ 833\dots$$

Najväčšie z týchto čísel je  $\frac{1}{36}$ , preto najväčšiu šancu má Adam.

*Poznámka:* Jednotlivé pravdepodobnosti sme mohli vypočítať aj ako súčin pravdepodobnosti, že na prvej kocke padne 1 bodka, a pravdepodobnosti, že na druhej kocke padne 1 bodka. V uvedených troch prípadoch by sme dostali výsledky

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \quad \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}.$$

7. Výpočty pravdepodobností jednotlivých hráčov:

*Adam Poctivý:* Celkom je 36 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivé sú dve: na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej kocke stena so 6 bodkami, alebo naopak. Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{2}{36} = 0,055\ 555\dots$$

*Beáta Nečestná:* Celkom je 64 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivých je 6: na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej kocke niektorá z troch stien so 6 bodkami (to nastane v 3 prípadoch), alebo naopak. Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{6}{64} = 0,09375.$$

*Viera Polovičná:* Celkom je 48 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivé sú 4: na špeciálnej kocke padne stena s 5 bodkami a na obyčajnej kocke stena so 6 bodkami (to nastane v 1 prípade), alebo na obyčajnej kocke padne stena s 5 bodkami a na špeciálnej stena so 6 bodkami (to nastane v 3 prípadoch). Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{4}{48} = 0,08333\dots$$

*Poznámka.* Podobne ako v riešení úlohy 6, aj tu môžeme použiť súčin pravdepodobností. V uvedených troch prípadoch dostaneme výsledky

$$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}, \quad 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{64}, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4}{48}.$$

8. Najväčšiu šancu na výhru má **Beáta Nečestná a Viera Polovičná**.

Výpočty pravdepodobností jednotlivých hráčov:

*Adam Pochivý:* Celkom je 36 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivé sú štyri:

- na jednej kocke padne stena so 4 bodkami a na druhej kocke stena s 5 bodkami alebo naopak,
- na jednej kocke padne stena s 3 bodkami a na druhej kocke stena so 6 bodkami alebo naopak.

Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{4}{36} = 0,111111\dots$$

*Beáta Nečestná:* Celkom je 64 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivých je osem:

- na jednej kocke padne stena so 4 bodkami a na druhej kocke stena s 5 bodkami (táto možnosť nastane v 1 prípade) alebo naopak,
- na jednej kocke padne stena s 3 bodkami a na druhej kocke niektorá z troch stien so 6 bodkami (táto možnosť nastane v 3 prípadoch) alebo naopak.

Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{8}{64} = 0,125.$$

*Viera Polovičná:* Celkom je 48 rovnocenných možností, ako môžu padnúť dve kocky. Priaznivých je šesť:

- na jednej kocke padne stena s 5 bodkami a na druhej kocke stena so 4 bodkami (táto možnosť nastane v 1 prípade) alebo naopak,
- na špeciálnej kocke padne stena s 3 bodkami a na obyčajnej stena so 6 bodkami (táto možnosť nastane v 1 prípade), alebo na špeciálnej kocke padne stena so 6 bodkami a na obyčajnej stena s 1 bodkou (táto možnosť nastane v 3 prípadoch).

Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{6}{48} = 0,125.$$

*Poznámka.* Ak pri výpočte použijeme súčin pravdepodobností, dostaneme v uvedených troch prípadoch výsledky

$$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{36}, \quad 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{8}{64}, \quad 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{48}.$$

